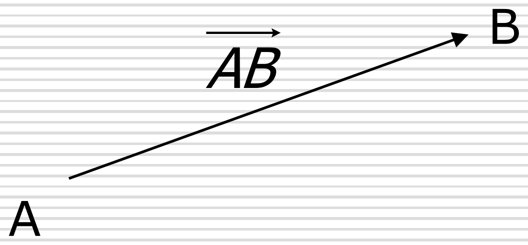
ALJABAR LINEAR DAN MATRIKS

VEKTOR

Definisi Vektor

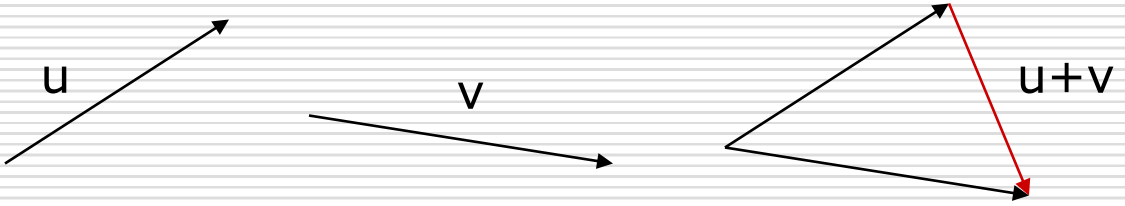
- Ada dua besaran yaitu:
  - Vektor → mempunyai besar dan arah
  - Skalar → mempunyai besar
- 

  A : titik awal

  B : titik akhir
- Notasi vektor biasanya menggunakan huruf kecil (misal: a, b, v_1, v_2).

Operasi Vektor (1)

- Penjumlahan vektor



u+v adalah vektor dengan titik asal di titik asal u dan titik akhirnya di vektor v.

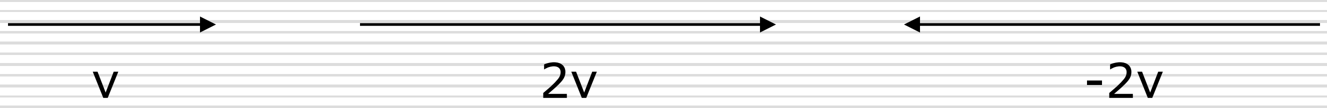
- Kesamaan vektor

2 vektor dikatakan sama jika besar dan arahnya sama.

Operasi Vektor (2)

- Perkalian vektor dengan skalar

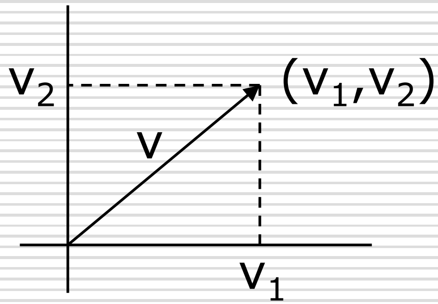
  Jika v suatu vektor dan $k \neq 0$ suatu skalar, maka kv adalah suatu vektor yang besarnya |k| kali besar vektor v dan searah v jika $k>0$ dan berlawanan arah dengan v jika $k<0$.



- Jika v suatu vektor, maka –v adalah vektor yang besarnya sama dengan vektor v, tetapi arahnya berlawanan.

Vektor di R^2

- v di R^2 dapat dinyatakan dalam komponen-komponennya.



- Jika u,v vektor di R^2, maka
  $u=v \Leftrightarrow u_1=v_1$ dan $u_2=v_2$
  $u+v = (u_1,u_2)+(v_1,v_2) = (u_1+v_1,u_2+v_2)$
- Jika u di R^2 dan $k\neq 0$ skalar, maka
  $ku = k(u_1,u_2) = (ku_1,ku_2)$

Vektor di R^3

- v di R^3 juga dapat dinyatakan dalam komponen-komponennya, yaitu $v=(v_1,v_2,v_3)$
- Jika u,v vektor di R^3, maka

  $u=v \Leftrightarrow u_1=v_1 \;;\; u_2=v_2 \;;\; u_3=v_3$

  $u+v = (u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3) = (u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$
- Jika u di R^3 dan $k\neq 0$ skalar, maka

  $ku = k(u_1,u_2,u_3) = (ku_1,ku_2,ku_3)$

Norma Vektor (1)

- Misalkan u vektor di R^2/R^3 maka norma u dengan notasi ||u|| didefinisikan sebagai:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

ex: u=(1,2,-3)

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

- Vektor yang normanya = 1 disebut vektor unit (vektor satuan)

Norma Vektor (2)

- Jika $v \neq 0$ suatu vektor di R^2/R^3 maka $\dfrac{v}{\|v\|}$ merupakan vektor unit.

  ex: u=(1,2,0)

  $$\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

  Vektor satuan yang dapat dibentuk:

  $$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{0}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}, 0\right)$$

Sifat Operasi Vektor

- Jika u,v,w vektor di R^2/R^3 maka berlaku:
  1. $u+v = v+u$
  2. $(u+v)+w = u+(v+w)$
  3. $u+0 = 0+u = u$
  4. $u+(-u) = (-u)+u = 0$
  5. $k(lu) = (kl)u$
  6. $(k+l)u = ku+lu$
  7. $k(u+v) = ku+kv$
  8. $1.u = u$

Vektor di R^n

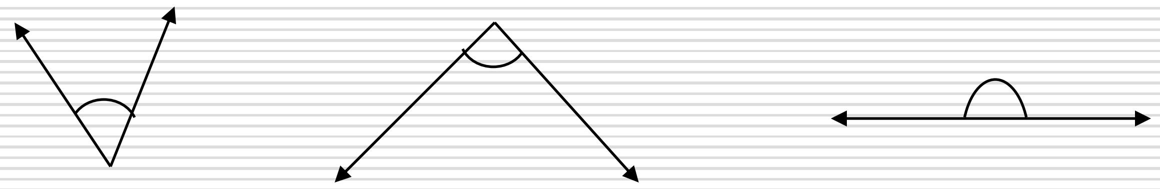
- Jika u,v di R^n, maka $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ dan $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$
- $u=v \Leftrightarrow u_1=v_1\ ;\ u_2=v_2\ ;\ \ldots\ ;\ u_n=v_n$

  $u+v = (u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1,v_2,\ldots,v_n)$

  $\quad = (u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)$
- Jika u di R^n dan $k\neq 0$ skalar, maka

  $ku = k(u_1,u_2,\ldots,u_n) = (ku_1,ku_2,\ldots,ku_n)$

Perkalian Titik (*Dot Product*) (1)



- Jika u,v vektor di R^2/R^3 dan θ sudut antara u dan v dengan notasi u.v maka

$$u.v = \begin{cases} ||u||\ ||v|| \cos\theta, \text{ jika u dan v} \neq 0 \\ 0, \text{ jika u atau v} = 0 \end{cases}$$

- Dengan aturan cosinus, didapatkan bahwa $u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Perkalian Titik (*Dot Product*) (2)

- ex: u=(2,1,-3) dan v=(1,0,-1)

  Berapa sudut antara u dan v?

- Penyelesaian:

  u = (2,1,-3) → $\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

  v = (1,0,-1) → $\|v\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

  u.v = 2.1 + 1.0 + (-3)(-1) = 5

  u.v = ||u|| ||v|| cos θ

  5 = $\sqrt{14}\sqrt{2}$ cos θ

  cos θ = $\dfrac{5}{\sqrt{28}} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}} = \dfrac{5}{14}\sqrt{7}$ → θ = arccos $\dfrac{5}{14}\sqrt{7}$

Perkalian Titik (*Dot Product*) (3)

- Jika u dan v vektor di R^2/R^3 maka:
  1. $u.u = ||u||^2$
  2. Jika u dan v bukan vektor nol dan θ sudut antara u dan v, maka:
     - θ sudut lancip $\Leftrightarrow$ u.v>0
     - θ sudut tumpul $\Leftrightarrow$ u.v<0
     - $\theta = \pi/2 \Leftrightarrow u.v=0$

     Ex: u=(1,-2,3), v=(-3,4,2), w=(3,6,3)

     Bagaimana sudut yang terbentuk antar 2 vektor masing-masing?

Sifat Perkalian Titik

- Jika u,v,w vektor di $R^2/R^3/R^n$ maka:
  1. u.v = v.u
  2. u.(v+w) = u.v + v.w
  3. k(u.u) = (ku).u = u.(kv), k skalar
  4. u.u>0 jika u$\neq$0

     u.u=0 jika u=0

Soal

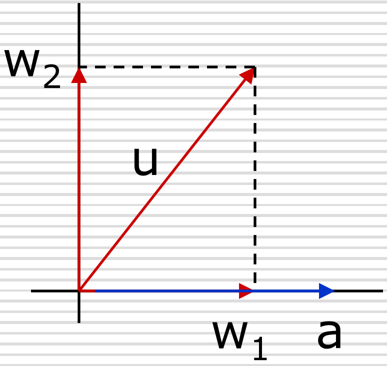
- Diketahui u=(4,5,-3), v=(1,-2,-1). Berapa sudut yang terbentuk antara u dan v dan berupa sudut apa?
- Diketahui a=(2,4,-3) dan b=(-4,2,-1). Tentukan dot product antara vektor satuan a dengan vektor b!
- Diketahui a=(-1,0,-1) dan b=(1,1,0). Berapa sudut antara a dan b?
- Diketahui vektor x dan vektor y adalah vektor yang berlawanan arah dengan x yang besarnya sama. Berapa sudut yang terbentuk antara vektor x dan y?

Vektor Ortogonal

- Misal u,v vektor di $R^2/R^3/R^n$, maka u dikatakan tegak lurus v atau u disebut vektor ortogonal, jika u.v=0

Proyeksi Ortogonal (1)

- Diberikan vektor $a \neq 0$ dan vektor $u \neq 0$



$$w_1 + w_2 = u$$

$$w_1 = u - w_2$$

- Vektor w_1 disebut proyeksi ortogonal vektor u pada vektor a ($w_1 = \text{Proj}_a u$)
- Vektor w_2 disebut komponen vektor u yang tegak lurus vektor a ($w_2 = u - \text{Proj}_a u$)

Proyeksi Ortogonal (2)

- Jika a vektor di R^2/R^3 dan $a \neq 0$ maka

$$w_1 = \mathrm{Proj}_a u = \frac{u.a}{\|a\|^2}.a$$

$$w_2 = u\text{-}\mathrm{Proj}_a u = u - \frac{u.a}{\|a\|^2}.a$$

Proyeksi Ortogonal (3)

- Ex:

  u=(2,-1,3) dan a=(4,-1,2)

  Tentukan $Proj_a u$ dan $||Proj_a u||$!

  Penyelesaian:

  u.a = (2)(4)+(-1)(-1)+(3)(2) = 15

  $||a||^2 = 16+1+4 = 21$

  $w_1 = Proj_a u = 15/21.(4,-1,2)$

  $$= \left(\frac{60}{21}, -\frac{15}{21}, \frac{30}{21}\right) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right)$$

  $$||w_1|| = \sqrt{\frac{400}{49} + \frac{25}{49} + \frac{100}{49}} = \sqrt{\frac{525}{49}} = \sqrt{\frac{75}{7}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{5}{7}\sqrt{21}$$

Perkalian Silang (*Cross Product*) (1)

- Misal u,v vektor-vektor di R^3
- Perkalian silang vektor u dan v dengan notasi uxv adalah:

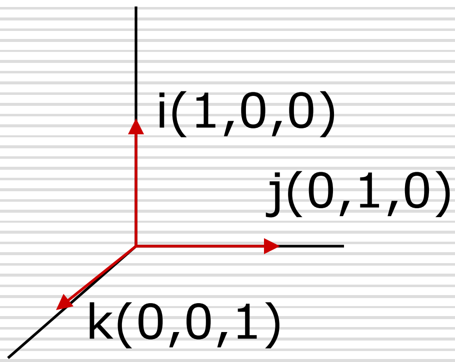
$$uxv = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$uxv = (u_2v_3-u_3v_2,-u_1v_3+u_3v_1,u_1v_2-u_2v_1)$$

- Ex: u=(1,2,0), v=(0,1,-1)

  maka uxv=(-2,1,1)

Perkalian Silang (*Cross Product*) (2)

- 

  Vektor i,j,k disebut vektor satuan standar

- Misal v sebarang vektor di R^3 berarti

  $v=(v_1,v_2,v_3)$

  $v=v_1(1,0,0)+v_2(0,1,0)+v_3(0,0,1)$

  $v=v_1 i + v_2 j + v_3 k \rightarrow u x v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

Hubungan Perkalian Titik dengan Perkalian Silang

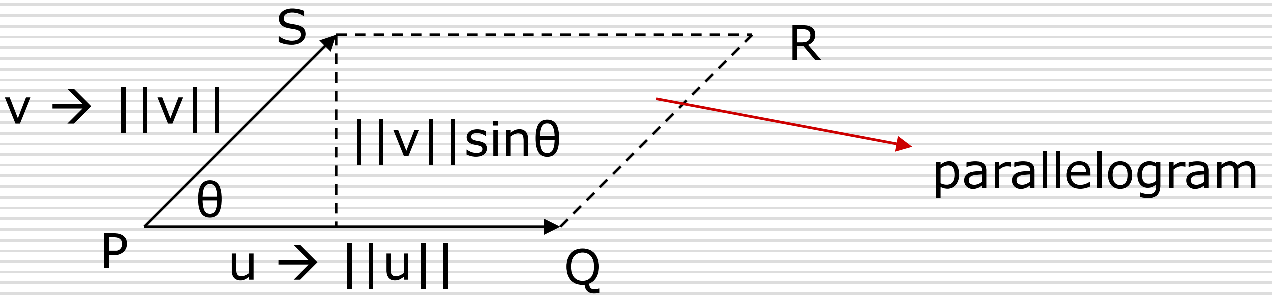
- Jika u,v,w vektor di R^3 berlaku
  1. $u.(vxw) = 0$ jika $u \perp (uxv)$
  2. $v.(uxv) = 0$ jika $v \perp (uxv)$
  3. $||uxv||^2 = ||u||^2||v||^2 - (u.v)^2$
  4. $ux(vxw) = (u.w).v - (u.v).w$
  5. $(uxv)xw = (u.w).v - (v.w).u$

Sifat Perkalian Silang

- Jika u,v vektor di R^3 dan k skalar, maka:
  1. uxv = -vxu
  2. ux(v+w) = (uxv)+(uxw)
  3. (u+v)xw = (uxw)+(vxw)
  4. k(uxv) = (ku)xv = ux(kv)
  5. ux0 = 0xu = 0
  6. uxu = 0

Parallelogram (1)

- Jika u dan v vektor dengan titik asal sama maka ||uxv|| merupakan luas daerah parallelogram yang ditentukan oleh uxv.



- Luas jajaran genjang PQRS

  = alasxtinggi = ||u|| ||v|| sinθ = ||uxv||
- Luas segitiga PQS = ½ luas jajaran genjang = ½ ||uxv||

Parallelogram (2)

- Ex:

  Tentukan luas segitiga dengan titik sudut P(2,6,-1), Q(1,1,1), R(4,6,2)!

Parallelogram (3)

- Harga mutlak dari determinan $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ adalah sama dengan luas parallelogram di R^2 yang ditentukan oleh vektor $u=(u_1 u_2)$ dan $v=(v_1,v_2)$
- Harga mutlak dari determinan $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ adalah sama dengan volume parallelogram di R^3 yang ditentukan oleh vektor $u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2)$, dan $w=(w_1,w_2,w_3)$

Soal

- Diketahui $u=(1,-2,3)$, $v=(-3,4,2)$, $w=(3,6,3)$
  1. Berapakah sudut yang terbentuk antara sudut u dan w? (tanpa kalkulator)
  2. Sudut apakah yang terbentuk antara 2 vektor masing-masing?
  3. Tanda . berarti perkalian titik, x berarti perkalian silang, hitung:
     a. Berapakah $(2u\text{x}w).3v$?
     b. Berapakah $(2u.w)\text{x}3v$?
     c. Berapakah $(2u\text{x}w)\text{x}3v$?
     d. Berapakah $(2u.w).3v$?
  4. Berapa luas parallelogram yang terbentuk dari vektor v dan w?
  5. Berapa volume parallelogram yang terbentuk dari ketiga vektor tersebut?

- Kumpul max. Kamis, 3 Juni 2010 pk. 23.59 WIB ke email: yessica_24@yahoo.com
- Subject: 112_67200xxxx_1
- Nama file: 112_67200xxxx_1.doc or 112_67200xxxx_1 docx