

ALJABAR LINEAR DAN MATRIKS

EIGEN VALUE DAN EIGEN VEKTOR

Definisi

- Diberikan matriks A $n \times n$, maka vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut vektor karakteristik (*eigen vector*) dari matriks A .
 - Jika berlaku $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ , maka λ disebut nilai karakteristik (*eigen value*) dari matriks A .
-

Penyelesaian

□ $Ax = \lambda x$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

□ Vektor karakteristik merupakan solusi non trivial (solusi yang tidak semuanya nol) dari $(A - \lambda I)x = 0$

□ Agar diperoleh solusi non trivial maka

$$|A - \lambda I| = 0$$

$|A - \lambda I| = 0$ disebut polinomial karakteristik

Soal

- Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Penyelesaian

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) = 0$$

Penyelesaian

- Jadi polinomial karakteristik

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) = 0$$

- Akar-akar polinomial karakteristik

$$\lambda_1=0, \lambda_2= \lambda_3=1$$

- Jadi nilai eigen matriks A adalah 0 dan 1.
-

Penyelesaian

- Vektor eigen untuk $\lambda=0$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

- Jadi $x_1=0, x_2=0, x_3=t, t \neq 0, t \in \mathbb{R}$
 - Jadi $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ merupakan vektor eigen yang berkorespondensi dengan $\lambda=0$
-

Penyelesaian

- Vektor eigen untuk $\lambda=1$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

- Jadi $x_1=a, x_2=b, x_3=0, a,b \neq 0, a,b \in \mathbb{R}$
 - Jadi $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ merupakan vektor eigen yang berkorespondensi dengan $\lambda=1$
-