ALJABAR LINEAR DAN MATRIKS

DIAGONALISASI

Definisi

- Suatu matriks bujur sangkar A dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks invertibel P, sehingga $P^{-1}AP = D$, dengan D adalah matriks diagonal dan P dikatakan mendiagonalisasi A

Langkah-langkah Diagonalisasi

1. Tentukan n vektor karakteristik A yang bebas linear (yaitu kolom yang memuat 1 utama melalui OBE), misalnya $P_1, P_2, \ldots, P_n$
2. Bentuk matriks P yaitu $P=[P_1\ P_2\ \ldots\ P_n]$
3. Tentukan P^{-1} dan $P^{-1}AP$ akan membentuk matriks diagonal

Langkah-langkah Diagonalisasi (*tidak selalu*)

1. Tentukan n nilai karakteristik A misalnya $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
2. Bentuk D = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Rumus

- $D = P^{-1}.A.P$
- $A^n = P.D^n.P^{-1}$

Contoh

- $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi A

Penyelesaian

- Didapat polinomial karakteristiknya $(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$
- Akar-akar karakteristik $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$
- Vektor karakteristik untuk $\lambda=1$ adalah $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$
- Vektor karakteristik untuk $\lambda=2$ adalah

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Penyelesaian Cont.

- Matriks P yang terbentuk $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Invers matriks P $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $P^{-1}AP =$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sama dengan $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Contoh

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

  Apakah A dapat didiagonalisasi?

Penyelesaian

- Syarat dapat didiagonalisasi, harus mempunyai vektor basis sebanyak nilai eigennya, sehingga matriks A tidak dapat didiagonalisasi karena vektor basisnya hanya 2

Rank Matriks dan Nullity

- Rank merupakan dimensi ruang kolom (banyaknya vektor yang bebas linear, yaitu kolom yang memuat 1 utama melalui OBE)
- Nullity merupakan dimensi ruang nol

Contoh

- Tentukan rank matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = -3 \neq 0$, maka rank(A)=3, nullity(A)=0

Contoh

- Tentukan rank matriks

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

- Bawa ke bentuk eselon baris tereduksi dengan OBE!
- Didapat

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Jadi rank matriks B = 3, karena yang memuat 1 utama adalah kolom 1, 2, 4
- Nullity(B) = 5-3 = 2