BAB 2

MATRIKS

Pengertian

(1 0 3 -1) merupakan array dimana array adalah susunan objek dalam baris.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ merupakan vektor dimana vektor adalah susunan objek dalam kolom.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ merupakan matriks dimana matriks adalah susunan objek dalam baris dan kolom.

Jadi:

- Array dapat disebut juga matriks baris karena array merupakan matriks yang mempunyai satu baris.
- Vektor dapat disebut juga matriks kolom karena vector merupakan matriks yang mempunyai satu kolom.

Notasi matriks biasanya menggunakan huruf kapital, misal A, M, B dan entri dari matriks dinotasikan dengan huruf kecil, misal a_{11}, a_{12}, m_{23}, m_{34}.

Ukuran matriks ditentukan oleh banyak baris dan kolom, yang dinotasikan dengan baris x kolom.

Contoh:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ → ukuran matriks A adalah 3x3

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$ → ukuran matriks B adalah 2x4

Jika A adalah matriks berukuran mxn, maka A dapat disajikan $A = [a_{ij}]$, dengan i=1,2,…,m dan j=1,2,…,n, dengan bentuk:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks untuk SPL

Bentuk umum SPL:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0$$

dapat diubah ke matriks:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriks yang diperbesar dari bentuk matriks di atas adalah:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Operasi Baris Elementar (OBE)

Metode dasar untuk menyelesaikan SPL adalah dengan menggantikan system yang diberikan dengan suatu system baru yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama tetapi lebih mudah diselesaikan. Sistem baru ini diperoleh dengan menerapkan tiga operasi baris dasar berikut:

1. Mengalikan suatu baris dengan suatu konstanta, $k \neq 0$
2. Menukarkan dua buah baris
3. Menambahkan kelipatan suatu baris dengan baris yang lain

Eliminasi Gaussian

Bentuk Eselon Baris Tereduksi

Suatu matriks dikatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi jika memenuhi sifat berikut:

1. Jika suatu baris yang entrinya tidak seluruhnya nol, maka entri tak nol pertamanya 1 dan disebut 1 utama
2. Jika ada suatu baris yang seluruhnya nol, maka baris tersebut diletakkan pada baris paling bawah
3. Dalam 2 baris yang berurutan, 1 utama pada baris yang bawah terletak lebih ke kanan dari 1 utama pada baris atasnya
4. Kolom yang memuat 1 utama mempunyai entri nol di tempat lain

Suatu matriks yang mempunyai sifat 1, 2, 3, tetapi tidak mempunyai sifat 4, disebut matriks berbentuk eselon.

Contoh matriks yang mempunyai bentuk eselon baris tereduksi adalah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Contoh matriks yang mempunyai bentuk eselon baris adalah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss Jordan

Eliminasi Gauss didasarkan pada matriks bentuk eselon baris dan eliminasi Gauss Jordan didasarkan pada matriks bentuk eselon baris tereduksi.

Langkah membawa matriks yang diperbesar dari suatu SPL ke bentuk eselon baris tereduksi adalah:

1. Letakkan kolom pertama yang tidak seluruhnya nol
2. Tukarkan baris pertama dengan baris yang lain, jika diperlukan, untuk memperoleh entri tak nol pada kolom pertama baris pertama
3. Jika entri baris pertama kolom paling kiri (pertama) a, maka kalikan 1/a pada baris pertama untuk memperoleh 1 utama pada baris pertama
4. Tambahkan kelipatan yang sesuai dari baris pertama terhadap baris lainnya untuk memperoleh entri nol di bawah 1 utama
5. Lakukan langkah 1-4 pada baris-baris berikutnya
6. Kolom yang memuat 1 utama variabelnya berperan sebagai variabel utama dan kolom yang tidak memuat 1 utama sebagai variabel bebas

<u>Contoh:</u>

Cari himpunan penyelesaian untuk SPL di bawah ini dengan eliminasi Gauss Jordan:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2$$

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

Langkah 1: membentuk SPL menjadi matriks yang diperbesar $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Langkah 2: mengalikan baris pertama dengan 1/2 $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Langkah 3: menambahkan -1 kali baris pertama ke baris kedua $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Langkah 4: mengalikan baris kedua dengan 2/3 $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Langkah 5: menambahkan -1 kali baris kedua ke baris ketiga $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Langkah 6: mengalikan baris ketiga dengan 1/2 $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Sampai pada langkah 6 ini, dikatakan Eliminasi Gauss, sehingga didapat penyelesaian sebagai berikut:

Pembacaan dari bawah, baris ketiga, yaitu $0x_1 + 0x_2 + x_3 = -1$, sehingga $x_3 = -1$.

Pembacaan untuk baris kedua, yaitu $x_2 - x_3 = 2$, sehingga jika $x_3 = -1$ disubstitusikan dalam persamaan didapat $x_2 = 1$.

Pembacaan untuk baris pertama, yaitu $x_1 + 1/2x_2 + 3/2x_3 = -1$, sehingga jika $x_3 = -1$ dan $x_2 = 1$ disubstitusikan dalam persamaan didapat $x_1 = 0$.

Untuk melengkapkan penyelesaian Eliminasi Gauss ini, akan dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 7a: menambahkan 1 kali baris ketiga ke baris kedua $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Langkah 7b: menambahkan -3/2 kali baris ketiga ke baris pertama $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Langkah 8: menambahkan -1/2 kali baris kedua ke baris pertama $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Sampai pada langkah 8 ini, dikatakan Eliminasi Gauss Jordan, sehingga didapat penyelesaian sebagai berikut:

Pembacaan bisa dari baris mana saja, yaitu baris pertama $x_1 = 0$, baris kedua $x_2 = 1$, dan baris ketiga x_3.

Jadi penyelesaiannya adalah $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

Operasi Matriks

Jika diketahui $A=[a_{ij}]$ dan $B=[b_{ij}]$, $i=1,2,\ldots,m$ dan $j=1,2,\ldots,n$, maka operasi pada matriks adalah:

1. Kesamaan matriks
   Matriks A dikatakan sama dengan matriks B jika ukuran matriks A sama dengan ukuran matriks B dan $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall ij$

   Contoh: Diketahui $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & y \end{pmatrix}$

   Jika matriks A = matriks B, maka x=1 dan y=-1

2. Penjumlahan dan pengurangan matriks
   Dua buah matriks A dan B dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika ukuran kedua matriks tersebut sama.

   $A \pm B = C$, dengan $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

   Contoh: Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   maka $A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 & -1+0 \\ 4+(-1) & 2+2 & 1+1 \\ -2+0 & 3+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. Perkalian matriks dengan skalar
   Matriks A dapat dikalikan dengan suatu konstanta k tanpa syarat apapun.

   $kA = [kaij]$, dengan k suatu konstanta

   Contoh: Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, maka $-3A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & -6 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

4. Perkalian matriks dengan matriks
   Dua buah matriks A dan B dapat dikalikan dengan syarat ukuran kolom matriks A sama dengan ukuran baris matriks B, sehingga hasil perkaliannya berukuran: ukuran baris A x ukuran kolom B.

   A_{mxn}, B_{nxp}, maka $AxB = C_{mxp} = [c_{ij}]$

   dengan $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Perlu diingat bahwa Ax$B \neq B$xA.

Contoh: Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, maka A_{3x3} x B_{3x1} berukuran 3x1,

sehingga didapat $AxB = \begin{pmatrix} 1.0 + 0.2 + (-1).(-1) \\ 4.0 + 2.2 + 1.(-1) \\ -2.0 + 3.2 + 0.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$,

tetapi B_{3x1} x A_{3x3} tidak bisa dihitung karena ukuran kolom matriks B tidak sama dengan ukuran baris matriks A

Latihan:

Hitunglah: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Sifat Matriks

Jika A, B, C matriks dengan ukuran sedemikian sehingga operasi matriks dapat dikerjakan dan k, l adalah skalar, maka berlaku:

1. $A \pm B = B \pm A$
2. $(AB)C = A(BC)$
3. $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$
4. $(A \pm B)C = AC \pm BC$
5. $C(A \pm B) = CA \pm CB$
6. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
7. $(k \pm l)A = kA \pm lA$
8. $k(A \pm B) = kA \pm kB$
9. $k(lB) = (kl)B$

Transpose Matriks

Jika A matriks mxn, maka transpose dari matriks A dengan notasi A^t adalah matriks berukuran nxm yang diperoleh dari matriks A dengan menukar baris dengan kolom.

Contoh: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, maka $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Sifat:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$
4. $(kA)^t = kA^t$, dengan k suatu konstanta

Macam-macam Matriks

1. Matriks identitas

   Matriks identitas (I) adalah matriks persegi yang entri pada diagonal utamanya adalah 1 dan 0 pada tempat yang lain.

   Contoh: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Matriks nol

   Matriks nol (0) adalah matriks yang semua entrinya nol.

   Contoh: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Matriks diagonal

   Matriks diagonal adalah matriks persegi yang entri pada diagonal utamanya tidak nol dan 0 pada tempat yang lain.

   Bentuk umum: $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$

   Contoh: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Matriks segitiga atas

   Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang entri di atas diagonal utamanya tidak nol.

Contoh: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. Matriks segitiga bawah
   Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang entri di bawah diagonal utamanya tidak nol.

   Contoh: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

6. Matriks simetris
   Suatu matriks dikatakan simetris jika matriks A sama dengan matriks A^t.

   Contoh: matriks $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ simetris dengan $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pangkat Matriks

Jika A adalah suatu matriks persegi, maka dapat didefinisikan pangkat bulat tak negatif dari A sebagai:

$$A^0 = I$$

$$A^n = A\ .\ A\ .\ \ldots\ .\ A\ (n \geq 0)$$

Jika A adalah matriks persegi dan r, s adalah bilangan bulat, maka:

1. $A^r A^s = A^{r+s}$
2. $(A^r)^s = A^{rs}$

Jika diketahui matriks diagonal $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$, maka pangkatnya adalah $D^k = \begin{pmatrix} d_1{}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2{}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n{}^k \end{pmatrix}$

Invers Matriks

Jika A adalah sebuah matriks persegi dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut bisa dibalik dan B disebut invers dari A.

Suatu matriks yang dapat dibalik mempunyai tepat satu invers.

<u>Contoh:</u>

$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ adalah invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

karena $AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ dan $BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Cara mencari invers khusus matriks 2x2:

Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka matriks A dapat dibalik jika ad-bc≠0, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad=bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

Contoh: invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ adalah $A^{-1} = \dfrac{1}{2(3)-(-5)(-1)}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sifat:

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama, maka:

1. AB dapat dibalik

2. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Jika A bisa dibalik, maka didefinisikan pangkat bulat negatif sebagai

$$A^{-n} = (A^{-1})^{n} = A^{-1} \,.\, A^{-1} \,.\, \dots \,.\, A^{-1}$$

Sifat pangkat matriks yang dapat dibalik:

1. A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A^{n} dapat dibalik dan $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$, $n=0,1,2,\dots$
3. Untuk sebarang skalar tak nol k, matriks kA dapat dibalik dan $(kA)^{-} = \frac{1}{k} A^{-}$

Invers Matriks Diagonal

Jika diketahui matriks diagonal $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$,

maka inversnya adalah $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$.

Invers Matriks dengan OBE

Caranya hampir sama dengan mencari penyelesaian SPL dengan matriks (yaitu dengan Gauss-Jordan)

$$A^{-1} = E_k \, E_k^{-1} \dots E_2 \, E_1 \, I_n$$

dengan E adalah matriks dasar/matriks elementer (yaitu matriks yang diperoleh dari matriks I dengan melakukan sekali OBE).

Langkah mencari invers matriks dengan OBE:

1. Jika diketahui matriks A berukuran persegi, maka cara mencari inversnya adalah reduksi matriks A menjadi matriks identitas dengan OBE dan terapkan operasi ini ke I untuk mendapatkan A^{-1}.
2. Untuk melakukannya, sandingkan matriks identitas ke sisi kanan A, sehingga menghasilkan matriks berbentuk $[A \mid I]$.
3. Terapkan OBE pada matriks A sampai ruas kiri tereduksi menjadi I. OBE ini akan membalik ruas kanan dari I menjadi A^{-1}, sehingga matriks akhir berbentuk $[I \mid A^{-1}]$.

<u>Contoh:</u>

Cari invers matriks untuk $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[b_3-b_1]{b_2-2b_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{b_3+2b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-b_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[b_2+3b_3]{b_1-3b_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_1-2b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Jadi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Determinan Matriks

Jika A adalah matriks persegi, determinan matriks A (notasi: det(A)) adalah jumlah semua hasil kali dasar bertanda dari A.

Determinan Matriks 2x2

Untuk matriks berukuran 2x2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka determinan matriks *A* adalah:

det (*A*) = |*A*| = *ad-bc*

Contoh:

Jika diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, maka | P | = (2x5) – (3x4) = -2

Determinan Matriks 3x3

Untuk matriks berukuran 3x3, maka determinan matriks dapat dicari dengan **aturan Sarrus**.

$$det\, A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right.$$

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$$

Contoh:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, maka determinan A = $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$

$$= 1(5)(1) + 2(4)(3) + 3(4)(2) - 3(5)(3) - 2(4)(1) - 1(4)(2)$$

Determinan Matriks *n*x*n*

Untuk matriks *n*x*n* digunakan **ekspansi kofaktor**.

Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, maka determinan matriks *A* dapat dicari dengan langkah sebagai berikut:

1. Menentukan baris/kolom mana yang akan diekspansi
2. Mencari minor (M_{ij}) masing-masing elemen pada matriks sesuai dengan baris/kolom terpilih
3. Mencari kofaktor dari masing-masing minor, dengan rumus: $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
   (jika $i+j$ genap maka $c_{ij} = M_{ij}$, jika $i+j$ ganjil maka $c_{ij} = -M_{ij}$)
4. Menghitung determinan yaitu: det(A) = $\sum a_{ij}c_{ij}$

Catatan:

Khusus matriks 3x3:

$$\det(A) = a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

<u>Contoh:</u>

Sebagai contoh, diambil untuk matriks 3x3 yaitu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Untuk menghitung determinannya, akan dilakukan ekspansi kofaktor baris pertama.

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$ maka $c_{11} = (-1)^{1+1}.(-3) = -3$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$ maka $c_{12} = (-1)^{1+2}.(-8) = 8$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7$ maka $c_{13} = (-1)^{1+3}.(-7) = -7$

Determinan matriks *A* adalah: det(A) = 1.(-3) + 2.8 + 3.(-7) = -8

Adjoint Matriks

Adjoint matriks adalah transpose dari matriks kofaktor.

Jika diketahui matriks 3x3 misalnya: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Kofaktor dari matriks tersebut adalah:

c_{11}=9 c_{12}=8 c_{13}=-2

c_{21}=-3 c_{22}=-1 c_{23}=4

c_{31}=-6 c_{32}=-12 c_{33}=3

Matriks kofaktor yang terbentuk adalah: $\begin{pmatrix} 9 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -6 & -12 & 3 \end{pmatrix}$

Adjoint matriks didapat dari transpose matriks kofaktor, yaitu:

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -6 & -12 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 8 & -1 & -12 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Invers Matriks *nxn*

Selain dengan OBE, invers matriks *nxn* bisa dicari juga dengan memanfaatkan adjoint matriks yaitu dengan rumus:

$$A^{-} = \frac{1}{\det(A)}.\mathrm{adj}(A), \text{ dengan } \det(A) \neq 0$$

<u>Contoh:</u>

Cari invers dari $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

det(A) =3(1)(1)+(-1)(4)(2)+2(0)(-2)-2(1)(2)-(-2)(4)(3)-1(0)(-1)

=3-7-0-4+24+0 =16

$$\text{Adjoint A} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 8 & -1 & -12 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Maka } A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 8 & -1 & -12 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/16 & -3/16 & -3/8 \\ 1/2 & -1/16 & -3/4 \\ -1/8 & 1/4 & 3/16 \end{pmatrix}$$

Latihan:

1. Bagaimana adjoint dari matriks $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Cari invers matriks dari $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ dengan adjoint matriks

Metode Cramer

Digunakan untuk mencari penyelesaian SPL selain dengan cara eliminasi-substitusi dan eliminasi Gauss/Gauss-Jordan.

Metode Cramer hanya berlaku untuk mencari penyelesaian SPL yang mempunyai tepat 1 solusi.

Diketahui SPL dengan *n* persamaan dan *n* variabel

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n$$

dibentuk matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Syaratnya $|A| \neq 0$

Penyelesaian untuk variabel-variabelnya adalah:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

dengan $|A_i|$ adalah determinan A dengan mengganti kolom ke-i dengan B.

<u>Contoh:</u>

Carilah penyelesaian dari:

2x+3y-z = 5

x+2z = -4

-x+4y-z = 6

Penyelesaian:

Dibentuk matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Dapat dicari |A| = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

= 2(0)(-1) + 3(2)(-1) + (-1)(1)(4) – (-1)(0)(-1) – 4(2)(2) – (-1)(1)(3) = -23

maka didapat:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{-23} = 0$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{-23} = -\frac{23}{23} = -$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{46}{23} = 2$$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$